4.2.10 Slovní úlohy vedoucí na kvadratické rovnice

Předpoklady: 040209

S druhou mocninou souvisí plochy, proto se mnoho slovních úloh vedoucích na kvadratické rovnice týká ploch.

Př. 1: Obdélníková garáž má plochu 24 m^2, jedna její strana je o 2 m delší než druhá. Urči rozměry garáže.

Označíme si délky stran:
první strana ... x
druhá strana ... $x+2$ (je o 2 m delší)
Plocha $S=ab=x(x+2)=24 \Rightarrow$ získali jsme rovnici $x(x+2)=24$.

$x^2+2x=24 \quad /-24$

$x^2+2x-24=0$

$(x+6)(x-4)=0 \Rightarrow$ rovnice má dvě řešení $x_1=-6$ (zřejmě nemá reálný význam), $x_2=4\text{ m}$

$\Rightarrow$ délka druhé strany $x+2=6\text{ m}$

Garáž má rozměry 4 m x 6m.

Př. 2: Obdélníkový pozemek má jednu stranu o polovinu delší než druhou. Urči jeho rozměry, jestliže má plochu 96 a.

První strana ... x
Druhá strana ... $1{,}5x$ (o polovinu delší než první strana)
Plocha pozemku ... $96\text{ a}=9600\text{ m}^2$

$S=ab=x\cdot 1{,}5x=9600$

$1{,}5x^2=9600 \quad /\cdot 2$

$3x^2=19\,200 \quad /:3$

$x^2=6\,400$

$x_1=\sqrt{6400}\text{ m}=80\text{ m}$ $\qquad$ $x_2=-\sqrt{6400}\text{ m}=-80\text{ m}$ v realitě nemá význam.

Druhá strana: $1{,}5x=1{,}5\cdot 80\text{ m}=120\text{ m}$.

Obdélníkový pozemek má rozměry 80 m x 120 m.

Př. 3: Jedna ze základen lichoběžníku je o pětinu větší než jeho výška, druhá je větší o 1 cm. Urči rozměry lichoběžníku, pokud je jeho plocha 115 cm^2.

Velikost výšky ... v

První základna ... $v+\frac{1}{5}v=\frac{6}{5}v$

Druhá základna ... $v+1$

Obsah lichoběžníku: $S=\frac{(a+c)v}{2}=\frac{\left(\frac{6}{5}v+v+1\right)v}{2}=115 \qquad /\cdot 2$

$\left(\frac{11}{5}v+1\right)v=230$

$\frac{11}{5}v^2+v=230 \qquad /-230$

$\frac{11}{5}v^2+v-230=0 \qquad /\cdot 5$

$11v^2+5v-1150=0$

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 11\cdot(-1150)}}{2\cdot 11}=\frac{-5\pm\sqrt{50\,625}}{22}=\frac{-5\pm 225}{22}$

$x_1=\frac{-5+225}{22}=\frac{220}{22}=10 \qquad x_2=\frac{-5-225}{22}=-\frac{230}{22}=-\frac{115}{11}$

Rozměry lichoběžníku jsou $a=12\text{ cm}$, $c=11\text{ cm}$, $v=10\text{ cm}$.

Př. 4: Pravoúhlý trojúhelník má obvod 24 cm a přeponu o délce 10 cm. Urči délku jeho odvěsen.

Zapíšeme délky stran:
přepona ... 10 cm
1. odvěsna ... x
2. odvěsna ... $24-10-x=14-x$.

Trojúhelník je pravoúhlý $\Rightarrow$ pro délky stran platí Pythagorova věta $a^2+b^2=c^2$.
Dosadíme: $x^2+(14-x)^2=10^2$

$x^2+196-28x+x^2=100 \qquad /-100$

$2x^2-28x+96=0 \qquad /:2$

$x^2-14x+48=0$

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-14)\pm\sqrt{(-14)^2-4\cdot 1\cdot 48}}{2\cdot 1}=\frac{14\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{14\pm 2}{2}$

$x_1=\frac{14+2}{2}=\frac{16}{2}=8 \Rightarrow$ druhá strana: $14-x=14-8\text{ cm}=6\text{ cm}$.

$x_2=\frac{14-2}{2}=\frac{12}{2}=6 \Rightarrow$ druhá strana: $14-x=14-6\text{ cm}=8\text{ cm}$.

Odvěsny trojúhelníku mají délky stran 8 cm a 6 cm.

Dodatek: Při řešení předchozího příkladu jsme nerozlišovali větší a menší stranu, proto nám vyšly obě varianty už z kvadratické rovnice.

Př. 5: Když jsme poloměr kruhu zvětšili o 2 cm, zvětšil se jeho obsah o $40\pi\ \text{cm}^2$. Urči poloměr kruhu před zvětšením.

Původní kruh: poloměr r … obsah $S = \pi r^2$

Zvětšený kruh: poloměr $r+2$ … obsah $S_v = \pi (r+2)^2$

Obsah kruhu se zvětšil o 40π … $S_v = S + 40\pi$

$\pi (r+2)^2 = \pi r^2 + 40\pi$

$\pi (r^2 + 4r + 4) = \pi r^2 + 40\pi$

$\pi r^2 + 4r\pi + 4\pi = \pi r^2 + 40\pi \quad / -\pi r^2 - 4\pi$

$4r\pi = 36\pi \quad / : 4\pi$

$r = \dfrac{36\pi}{4\pi} = 9$ cm

Poloměr kruhu před zvětšením byl 9 cm.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad záměrně nevede na kvadratickou rovnici. Jde v něm i o pro žáky nezvyklé počítání s násobky π.

Př. 6: Cena pamětí do počítače během roku dvakrát klesla o stejné procento tak, že se z 5200 Kč snížila na 3757 Kč. O kolik procent se cena snižovala?

Původní cena … 5200

Cena po snížení o *x* % … $5200(1-x)$

Cena pro druhém snížení … $5200(1-x)^2 = 3757$

$5200(1-x)^2 = 3757 \quad / : 5200$

$(1-x)^2 = 07225 \quad / \sqrt{\ }$ (víme, že obě strany jsou kladné číslo)

$1 - x = 0{,}85 \quad / + x - 0{,}85$

$0{,}15 = x$

Cena byla dvakrát snížena o 15 %,

Dodatek: Příklad je také možné řešit substitucí: $5200(1-x)^2 = 3757$
$5200y^2 = 3757$, případně tím, že neurčujeme hodnotu, o kolik procent se cena snížila, ale kolik procent původní ceny tvoří nová cena (tedy přímo číslo *y*).
Ve všech případech zabráníme roznásobení závorky v původní rovnici, které vede na dost obtížnou kvadratickou rovnici $5200x^2 - 104000x + 1443 = 0$.

Př. 7: Cena 1 litru benzínu vzrostla během roku o tolik procent, kolik korun stál litr na začátku roku. Urči původní cenu benzínu, jestliže na konci roku stál 39 Kč.

Původní cena ... *x* Kč.

nová cena po zvýšení ceny o x procent ... $x\left(1+\frac{x}{100}\right)$.

Po zvýšení ceny stál benzín 39 Kč: $x\left(1+\frac{x}{100}\right)=39$

$$x\left(1+\frac{x}{100}\right)=39$$
$$x+\frac{x^2}{100}=39 \qquad /\cdot 100$$
$$100x+x^2=3900 \qquad /-3900$$
$$x^2+100x-3900=0$$
$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-100\pm\sqrt{100^2-4\cdot 1\cdot(-3900)}}{2\cdot 1}=\frac{-100\pm\sqrt{25600}}{2}=\frac{-100\pm 160}{2}$$
$x_1=\frac{-100+160}{2}=\frac{60}{2}=30$ $\quad$ $x_2=\frac{-100-160}{2}=\frac{-260}{2}=-130 \Rightarrow$ nemá reálný význam.

Původní cena benzínu byla 30 Kč za litr.

Př. 8: Počet úhlopříček n-úhelníku je možné vypočítat podle jednoduchého vzorce. Zkus vzorec odvodit.

Řešení v následujícím příkladu.

Př. 9: Pokud se Ti nepodařilo vzorec v předchozím příkladu odvodit, pokus se o to ještě jednou podle následující nápovědy.
1. Kolik má n-úhelník vrcholů?
2. Kolik úhlopříček jde z každého vrcholu?
3. Kolik úhlopříček má n-úhelník, když známe hodnoty podle předchozích dvou bodů? (POZOR: Kolikrát jsme každou úhlopříčku počítali?)

1. Kolik má n-úhelník vrcholů?
n-úhelník má n vrcholů.

2. Kolik úhlopříček jde z každého vrcholu?
Z každého vrcholu vychází $n-3$ úhlopříček (úhlopříčky nevychází do sousedních vrcholů a do vrcholu samotného).

3. Kolik úhlopříček má n-úhelník, když známe hodnoty podle předchozích dvou bodů? (POZOR: Kolikrát jsme každou úhlopříčku počítali?)
Z každého z n bodů vychází $(n-3)$ úhlopříček $\Rightarrow$ celkem jde o $n(n-3)$ úhlopříček, ale každou jsme započítali dvakrát (z obou krajních bodů) $\Rightarrow$ úhlopříček je ve skutečnosti jen polovina $\Rightarrow$ n-úhelník má $\frac{n(n-3)}{2}$ úhlopříček.

Př. 10: Počet k úhlopříček n-úhelníku je dán vzorcem $k=\frac{n(n-3)}{2}$ Kolik vrcholů má n-úhelník se 44 úhlopříčkami?

Známe vzorec i počet úhlopříček $\Rightarrow$ $\frac{n(n-3)}{2}=44$ - rovnice k řešení.

$\frac{n(n-3)}{2}=44 \quad / \cdot 2$

$n^2-3n=88 \quad / -88$

$n^2-3n-88=0$

$(n-11)\cdot(n+8)=0$

$n_1=11$ $\qquad$ $n_2=-8$ - nemá reálný význam.

44 úhlopříček má jedenáctiúhelník.

Shrnutí: Slovní úlohy vedoucí na kvadratické rovnice se řeší úplně stejně jako jiné slovní úlohy.